АННОТАЦИЯ

диссертационной работы Мустафиной Мергуль Оралбековны на соискание степени доктора философии (PhD) по образовательной программе «8D05401-Математика» на тему:

«Идентификация граничных условий для дифференциальных уравнений на графах-деревьях»

Общая характеристика работы: В диссертационной работе исследуются вопросы однозначного восстановления граничных коэффициентов операторов Штурма–Лиувилля на графах и коэффициентов, входящих в условия согласования, по некоторым конечным наборам собственных значений родственных операторов.

Актуальность работы: Дифференциальные операторы на метрических графах — это область математической физики, применяемая в нанофизике, теории распространения волн, химии и других естественных науках. Модели, возникающие в этом контексте [1], позволяют аналитически вычислять спектральные и характеристики рассеяния операторов, сохраняя геометрическую структуру, поэтому такие модели являются важным инструментом теоретического изучения спектральных явлений. В работе [2] дифференциальные операторы на графах используются для анализа механических моделей, состоящих из струн и стержней, электрических цепей, гидро- и тепловых сетей.

Степень изученности:

Для дифференциальных операторов на геометрических графах, то есть для квантовых графов, также возникает множество частично обратных задач. Такие операторы используются для моделирования различных процессов в структурах типа графов и сетях в органической химии, мезоскопической физике, нанотехнологиях, гидродинамике, теории волноводов и других приложениях [2, 20]. Введение в квантовые графы можно найти в труде П. Кучмента [21]. Существует также обширная литература, посвященная обратным спектральным задачам для дифференциальных операторов на графах [7]. Здесь мы фокусируемся на частично обратных задачах. Такие задачи возникают, когда коэффициенты дифференциальных операторов (например, потенциалы Штурма–Лиувилля) на определенной части графа известны заранее. Эти коэффициенты могут быть получены путем измерений или методом реконструкции. Во втором случае решения частично обратных задач используются как дополнительный шаг для решения полных обратных задач на графах. Первые результаты по частично обратным задачам на графах были получены в работах В.Н. Пивоварчика [22], В.А. Юрко [23], С. Янга и других авторов [24–26]. Однако результаты указанных работ ограничиваются теоремами единственности для операторов Штурма–Лиувилля (Шрёдингера) на графах простой структуры (граф-звезда и простые графы с петлей). Позже Н.П. Бондаренко разработал конструктивный метод решения частично обратных задач на графах различных типов. С помощью этого метода были получены новые

результаты для дифференциальных операторов и узлов на граф-звездах [27–30], простых графах с циклами [31, 32], древовидных графах (графы без циклов) [33] и даже на графах любой геометрической структуры [34, 35]. Эти результаты включали не только теоремы единственности, но и конструктивные алгоритмы решения, обеспечивающие разрешимость и устойчивость полуобратных задач.

Таким образом, диссертационная работа направлена на глубокое изучение методов идентификации граничных коэффициентов и коэффициентов, входящих в условия согласования, операторов Штурма–Лиувилля на графах по некоторому конечному набору собственных значений родственных операторов. Предлагаемые методы идентификации имеют важное теоретическое и практическое значение для различных областей науки и техники. На начальном этапе эти методы были адаптированы для дифференциальных операторов на графах типа дерево и типа звезда.

Цель и задачи исследования:

Основной целью работы является изучение вопросов однозначного восстановления областей определения операторов Штурма–Лиувилля на графах-деревьях.

Для достижения этой цели были поставлены следующие задачи:

- Изучение прямых спектральных задач на основе анализа основных решений и характеристических определителей дифференциальных операторов второго порядка на графе-звезде и графе-дереве;
- Нахождение асимптотических формул собственных значений операторов Штурма–Лиувилля на графе-звезде;
- Изучение задач идентификации областей определения на графе-звезде и графе-дереве как частично обратных спектральных задач;
- Обоснование возможности однозначного восстановления граничных коэффициентов и коэффициентов, входящих в условия согласования, по конечному набору собственных значений родственных операторов.

Объект исследования: Линейные дифференциальные операторы на геометрических графах.

Предмет исследования: Однозначное восстановление граничных коэффициентов и коэффициентов, входящих в условия согласования, по конечному набору собственных значений родственных операторов.

Методика исследования: В диссертационной работе использовались апробированные методы общей теории дифференциальных уравнений, функционального анализа, а также теории функций комплексного переменного. В частности, в первом разделе для нахождения приближенных нулей целой функции использовался метод Хорна, а во втором разделе — теоремы о вычетах и свойства мероморфных функций. В отдельных главах использовались определители Вайнштейна, что позволило глубже определить свойства чередования нулей этих целых функций. В результате доказано, что искомые коэффициенты можно однозначно восстановить через конечное число собственных значений родственных операторов. Было

показано, что такое восстановление невозможно через конечный набор собственных значений только одного исходного оператора.

Научная новизна исследования: Полученные в первом разделе асимптотические формулы собственных значений являются новым результатом для случая, когда длины дуг графа различны. Ранее такие асимптотики рассматривались только для случая нулевых потенциалов и дуг одинаковой длины. В данной диссертации мы рассматриваем потенциалы как дифференцируемые функции и полагаем, что длины дуг принимают различные значения. Вторая новизна работы — обоснование достаточности лишь конечного числа собственных значений родственных операторов для однозначного восстановления искомых коэффициентов и предложение процедуры выбора родственных операторов.

Теоретическая и практическая значимость исследования: Диссертационная работа имеет теоретический характер по используемым методам и полученным результатам. В работе широко использовались формула Лагранжа в теории дифференциальных уравнений, аналитические методы теории целых и мероморфных функций, а также результаты спектральной теории линейных операторов. Несмотря на теоретический характер работы, полученные результаты имеют прямое отношение к прикладным задачам. В частности, при расчете колебаний мембраны ее часто заменяют одномерными сетями, которые рассматриваются как графы. Таким образом, замена двумерной задачи одномерными графовыми моделями при приближенных расчетах позволяет снизить размерность задачи. Таким образом, теоретические результаты работы могут служить методологической основой для решения конкретных прикладных задач.

Основные научные положения, выносимые на защиту:

- Прямые спектральные задачи для дифференциальных операторов второго порядка на графе-звезде и графе-дереве изучены на основе всестороннего анализа их основных решений и характеристических определителей;
- Найдены асимптотические формулы собственных значений операторов Штурма–Лиувилля на графе-звезде;
- Задачи идентификации областей определения рассмотрены как частично обратные спектральные задачи спектрального анализа дифференциального оператора второго порядка на графе-звезде и графе-дереве;
- Обоснована возможность однозначного восстановления граничных коэффициентов и коэффициентов, входящих в условия согласования, по конечному набору собственных значений родственных операторов.

Связь исследования с другими научно-исследовательскими проектами: Работа связана с выполнением научно-исследовательских проектов Комитета науки МНВО РК. Автор участвовала в этих проектах в качестве младшего научного сотрудника:

- № ИРН AP19678089 «Обратная спектральная задача для дифференциальных операторов на графах» (2023–2025 гг.).

Личный вклад автора: Все научные результаты, полученные в диссертационной работе, были получены совместно с научными консультантами автора и при их непосредственном участии. Автор принимала активное участие в разработке методов исследования, нахождении решений задач и анализе полученных результатов. Научные руководители внесли свой вклад в правильную постановку задачи, определение основных направлений исследования и обсуждение полученных результатов.

Апробация и обсуждение работы: Результаты диссертационной работы докладывались на международных научных конференциях, в том числе зарубежных, а также на научных семинарах. По теме диссертации опубликовано 6 работ, из них 3 работы в зарубежных журналах, имеющих импакт-фактор по базам данных Web of Science и Scopus, 1 работа в журнале, рекомендованном Комитетом по обеспечению качества в сфере науки и высшего образования МНВО РК, 2 работы в сборниках материалов международных научных конференций.

Публикации:

1. Kanguzhin B.E., Kaiyrbek Zh.A., Mustafina M.O. Recovering of the Stiffness Coefficients of the Sturm–Liouville Operator on a Star Graph from a Finite Set of Its Eigenvalues // Lobachevskii Journal of Mathematics. -2024.-V.45, №6. – P. 2711-2716. (WoS Q2. Scopus 57 процентиль). 02.10.2024.

2. Kanguzhin B.E., Kaiyrbek Zh.A., Mustafina M.O. Determination of Stiffness Coefficients at the Internal Vertices of the Tree Based on a Finite Set of Eigenvalues of an Asymmetric Second-Order Linear Differential Operator // Symmetry. -2025.-V.17, 1263. (WoS Q2. Scopus 93 процентиль). 07.08.2025.

3. Kanguzhin B.E., Mustafina M.O., Kaiyrbek O.A. Well-posed problems for the Laplace-Beltrami operator on a stratified set consisting of punctured circles and segments // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. -2025.-V.119, №3. -P 150-163. (WoS Q2. Scopus 53 процентиль). 30.09.2025.

4. G-H. Aimal Rasa, M. Madiyarov, M. Mustafina. On the unique solvability of nonlocal in time problems containing the ionkin operator in the spatial variable // KazNU Bulletin. Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science. -2025.- V. 128, №4 35-57. 30.12.2025.

Конференции:

1. Международная научная конференция «Уфимская осенняя математическая школа – 2023» (Уфа, 2023 г.);

2. Международная научно-практическая конференция «Аманжоловские чтения-2023» (ВКУ им. С. Аманжолова, Усть-Каменогорск, 2023 г.);

3. Республиканская научно-практическая конференция «Научное наследие Заки Ахметова и национальные ценности», посвященная 95-летию со дня рождения Заки Ахметова (ВКУ им. С. Аманжолова, Усть-Каменогорск, 2023 г.);

4. Международная научная конференция «Уфимская осенняя математическая школа – 2024» (Уфа, 2024 г.);

5. Международная научная конференция «Обратные задачи в естествознании» (ВКУ им. С. Аманжолова, Усть-Каменогорск, 2024 г.);

6. X Международная научно-практическая конференция студентов, магистрантов, докторантов и молодых ученых «Интеграция образования-науки-бизнеса: актуальные вопросы и перспективы», посвященная 125-летию Каныша Сатпаева (ВКУ им. С. Аманжолова, Усть-Каменогорск, 2024 г.);

7. Международная научно-практическая конференция «Аманжоловские чтения-2025» «Наука, общество и искусственный интеллект: актуальные вопросы взаимодействия» (ВКУ им. С. Аманжолова, Усть-Каменогорск, 2025 г.);

8. Международная научная конференция «Уфимская осенняя математическая школа – 2025» (Уфа, 2025 г.).

Структура и объем диссертационной работы: Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, приложений, заключения и списка использованной литературы. Общий объем работы составляет 109 страниц. Количество использованных источников – 136. Во введении обосновывается актуальность темы, излагаются цели, задачи, научная новизна и структура. В заключении обобщаются основные результаты работы, излагается их научная и практическая значимость, предлагаются направления для будущих исследований.

Благодарности: Выражаю искреннюю признательность отечественному научному консультанту - доктору физико-математических наук, профессору кафедры «Математика» механико-математического факультета КазНУ имени аль-Фараби Кангужину Балтабеку Есматовичу, а также зарубежному научному консультанту — доктору физико-математических наук, профессору Уфимского университета науки и технологий Ишкину Хабиру Кабировичу за уделенное ими ценное время, определение ключевых направлений исследования, профессиональные советы и всестороннюю поддержку при выполнении работы.

Также выражаю благодарность Правительству Республики Казахстан, руководству Казахского национального университета имени аль-Фараби и Восточно-Казахстанского университета имени С. Аманжолова за оказанную поддержку и предоставленную возможность эффективного сотрудничества с зарубежным научным консультантом.